

費用関数による流れ場把握手法の開発と 非等温流れへの応用

Optimizational Fluid Dynamics using Cost Function and Application for Unisothermal Flow

8025 山口 太朗

CFD and Δ ld measurement have been used widely to understand Δ w Δ ld. Although CFD can estimate full view of Δ w Δ ld easily, it contains some errors. Meanwhile, Δ ld measurement usually requires much labor and contains experimental errors, too. Image processing measurement can obtain observed data at many points simultaneously, but it is still difficult to measure whole points for a large Δ ld. In this work, we propose a new technique to understand the whole Δ w Δ ld by optimizing the cost function which represents the adjusted amount of the observed data and the residual of fundamental equations. To examine this technique we applied for three cases : 2D Δ w in the staggered screens, 3D Δ w in front of a rectangular, and 3D unisothermal Δ w. The results agreed well with visualized Δ w and themal patterns with minimizing the residual of the fundamental equations. It can be possible to reproduce whole Δ w Δ ld adequately by using our new technique. But it is still necessary to examine the performance of our method in full detail.

キーワード ; 画像計測, 数値流体力学, 最適化技術, 費用関数
image processing measurement, computaional Δ uid dynamics, optimization technology,
cost function

1. はじめに

流れ場を定量的に解析することは, 水・空気を問わず流体を扱う分野においては最も基本となるものである。その場合の解析手法としては, 物理方程式や現象のモデル化により導かれる基礎式をコンピュータなどにより解く数値解析法と, 模型実験やフィールド観測により計測する方法の2つがある。これらは現状では, 独立した別々の方法と位置づけられている。本研究はこれら2つの方法を組み合わせて互いの長所を生かし, 短所を補うことによって, よりリアルで, かつある程度簡便な流れ場解析の有力な手法を開発しようとするものである。

このような両解析手法を組み合わせた手法に関しては, 最近数値モデルの計算の進行過程で観測情報を取り入れ, 予測の精度を高めようとする四次元同化法¹⁾や, 画像計測のデータ処理に物理モデルを組み込むといった試み²⁾³⁾もいくつか行われるようになってきている。

本研究では, 費用関数を使って, 画像解析により, 面的に多点同時計測された場の情報を活かし, CFD に用いられる基礎方程式から導出された差分式を満足するような解を導く, いわゆる最適化手法に基づいて両者の融合を図る。

本報では, 二次元場として三枚衝立流れ, 三次元場として角柱前面流れ, 非等温場として自然対流流れを対象とした適用例を示す。

2. 従来手法と本手法の接点

2-1 数値流体力学に基づく支配方程式の差分化

CFD 解析では, 基礎式を離散的に記述し, 数値的に解を求めている。ここでは, 離散化法として有限差分近似 (FDM : Finit Diãerence Method) を用いた。移流項には Power-law を採用した。また, 壁付近のモデル化には, 壁関数モデルを, 乱流モデリングには, 標準 k Δ 乱流モデルを採用した。

2-2 画像計測

ここでは、PIV(Pattern Imaging Velocimetry)による二次元画像計測と、PTSD(Pattern Tracking and Spatial Derivative)による三次元速度計測、及び、感温液晶による温度計測を行った。これら、画像計測によって、面的な多点同時測定が可能である。パターンの同定には、輝度差累積棄却法⁴⁾を、過誤ベクトル判定には、8近傍評価法を用いた。

3. 最適化手法

3-1 費用関数

費用関数によって、実測の持つ情報を出来るだけ損なわず、流れ場の支配方程式を出来るだけ満たすという条件を評価し、最適化を行う。第一項目には、2-2の画像計測から得られた実測値との差を、第二項目以下には、支配方程式の差分形式のものを採用している。各条件が満たされれば、費用関数のそれぞれの項は零となり、また各条件項の自乗をとることで、それぞれの項は零以上の値をとるようにしている。このときの費用関数 E は、次式(??)となる。但しここでは、各変数は、代表長さ、代表速度で無次元化している。

$$E(\mathbf{Q}) = \sum_{i,j,k} \left[\underbrace{[f\mathbf{Q}(i;j;k) - \mathbf{Q}_{obs}(i;j;k)]^2}_{\text{第一項目}} + \underbrace{\bar{a} F_1^2(i;j;k)}_{\text{第二項目}} + \underbrace{\bar{a} F_{2,1}^2(i;j;k)}_{\text{第三項目}} \right]; \quad (1)$$

ここで、 $i;j;k$ はメッシュ番号を示しており、費用関数は対象区間全体で評価している。 l は次元数を示す。 $\mathbf{Q}; \mathbf{Q}_{obs}$ は、最適化対象の物理量を示し、ここでは、速度成分 $u;v;w$ である。または、その観測値である。 F_1, F_2 は、差分化した支配方程式であり、連続式とNavier-Stokes方程式を採用した。但し、連続式を満たすように圧力を決定することで、費用関数の条件項を一つ少なくする方法も考えられ、論文中ではその方法についても検討している。連続式とNavier-Stokes方程式は、2-1で示した差分方法を用いた。差分は、control-volumeで積分することによって行われているが、その積分範囲を図1に示した。差分された支配方程式 F_1, F_2 、つまり、control-volumeで積分した発散量とNavier-Stokes方程式は次式のように与えられる。

$$F_1 = \sum_{w,s,b} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] dx dy dz;$$

$$\begin{aligned} & f u(i + \frac{1}{2}; j; k) - u(i - \frac{1}{2}; j; k) \bar{\Delta} x \bar{\Delta} y \bar{\Delta} z \\ & + f v(i; j + \frac{1}{2}; k) - v(i; j - \frac{1}{2}; k) \bar{\Delta} x \bar{\Delta} z \\ & + f w(i; j; k + \frac{1}{2}) - w(i; j; k - \frac{1}{2}) \bar{\Delta} x \bar{\Delta} y; \end{aligned} \quad (2)$$

$$F_{2,1} = \sum_{w,s,b} \left[\frac{\partial u \mathbf{Q}}{\partial x} + \frac{\partial v \mathbf{Q}}{\partial y} + \frac{\partial w \mathbf{Q}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{A} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} \right) \right] dx dy dz;$$

$$\begin{aligned} & A_{l,p}(i;j;k) \mathbf{Q}_{l,p}(i;j;k) + A_{l,E}(i;j;k) \mathbf{Q}_{l,E}(i;j;k) \\ & + A_{l,W}(i;j;k) \mathbf{Q}_{l,W}(i;j;k) + A_{l,N}(i;j;k) \mathbf{Q}_{l,N}(i;j;k) \\ & + A_{l,S}(i;j;k) \mathbf{Q}_{l,S}(i;j;k) + A_{l,T}(i;j;k) \mathbf{Q}_{l,T}(i;j;k) \\ & + A_{l,B}(i;j;k) \mathbf{Q}_{l,B}(i;j;k) + B_l(i;j;k); \end{aligned} \quad (3)$$

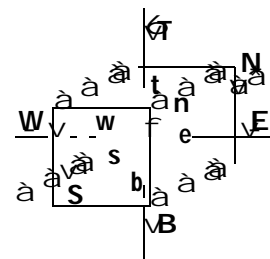


図1. 三次元での control-volume .
球は、物理量の定義点、中心が、 p 、
方位の大文字で p に隣接する点の位置関係を示す。
小文字は、control-volume の各表面の中央点を示す。
積分範囲は、小文字で囲まれる範囲。

ここで、 $\bar{\Delta} x; \bar{\Delta} y; \bar{\Delta} z$ は、control-volume の一辺の長さであり、 \bar{A} は、実効拡散係数、 S_l は、 \mathbf{Q} に対するソース項を示す。また、 A, B は、差分化したときの適当な係数及び定数項を示す。

3-2 最適化

費用関数法の最適化とは、つまり、費用関数を最小にする時の変数 \mathbf{Q} を求めることになる。拘束条件 F が式(??),(??)のように、 \mathbf{Q} について一次式として与えられるので、費用関数 E は変数 \mathbf{Q} について、二次式となる。よっ

て、最小値と極小値は等しく、変数 Q での費用関数 E の一回微分が零となるときの変数 Q を求めればよい。つまり、

$$\frac{\partial E(Q)}{\partial Q(i; j; k)} = 0; \quad (i = 1; 2; \dots; j = 1; 2; \dots; k = 1; 2; \dots; l = 1; 2 \text{ or } 1; 2; 3) \quad (4)$$

を解けば、最適解が見つかる。実際には (??) 式は、格子点の数だけ存在するため、最適値は、繰り返し計算で求めることになる。

3-3 費用関数の設定

(1) 費用関数における各条件項の重み係数

重み係数は、互いの大小により効果が現れる。つまり、いずれか一つを、基準値とし、残りを基準に対する比で示しても一般性は失われない。そこで、実測値との差を表す第一項目を基準とし、重みを 1.0 とする。

費用関数法では、各条件項の総和が最小になるように、最適解が求まるわけであるから、逆に言うと、最適解の近辺では、各条件項の変化が同程度となっていると考えられる。つまり、全ての条件を満たした、費用関数が零の理想状態における各条件項の変化量に着目すれば、それぞれの条件がどの程度優位に機能しているか分かる。つまり、この優位度を均一にするためには、理想状態で最適化対象の変量を少し変えたときの各条件項の変化量を、ほぼ同等の値にすればよいことが分かる。理想状態での各条件項の変量から費用関数の各項の重み $c_{\text{第一項}}$; c_{F_1} ; c_{F_2} は、

$$c_{\text{第一項}} = 1.0; \quad c_{F_1} = \frac{\text{第一項の変化量}}{F_1 \text{項の変化量}} (= \bar{a}); \quad c_{F_2} = \frac{\text{第一項の変化量}}{F_2 \text{項の変化量}} (= \bar{a}); \quad (5)$$

と求まる。しかし、一般に把握したい流れ場の理想状態が分からないので、その問題に対する数値解析解を理想状態とし、重みを算定するとよい。また、ニーズに応じては、特に重視する条件もあると考えられるので、重視する条件に関しては、更に、各条件の重みを大きくしてやればよい。

(2) 第一項における重み係数の補正

PIV 画像計測では、二枚の画像データから抽出された瞬時値を、数十乃至数百組平均操作することで各点の観測値を出力している。画像組毎に瞬時値が抽出されるかどうかは、その測定点でトレーサーがその瞬間に存在するかどうかの偶然性による。つまり、瞬時値が抽出される画像枚数は、各点で異なる。定常状態を測定していることを前提にしているので、その平均操作に用いられる画像組が多ければ信頼性が高いと云える。つまり実測値は、各点毎にその信頼性 (誤差を含む確率) が異なっていると考えられる。そこで、測定点毎に、費用関数の第一項の重みを、画像の処理枚数 n と分散値 σ から統計学に基づいた補正を行うと、補正值 $c_{i,j,k}$ が、式 (??) のように求まる。但し、誤差の分布関数は、正規母集団を仮定する。ここで、 $t(n-1; 5)$ は、 $n-1$ の自由度の t 分布で 5% の信頼限界を示す。

$$E = \bar{A} + c_{i,j,k} \bar{A} Q(i; j; k) - c_{\text{obs}}(i; j; k) \bar{A} \quad (6)$$

$$c_{i,j,k} = \frac{n_{i,j,k} - 1}{t(n_{i,j,k} - 1; 5)^2 \bar{Q}_{j,k}} \bar{A} \frac{n - 1}{t(n - 1; 5)^2 \bar{\sigma}_{\max}} :$$

(3) 最適化対象でない変量

流れ場を最適化対象と選んだ場合、支配方程式には、圧力差や拡散係数、温度が均一でない場合は、温度差が場の変化と共に変化する。これらの変量もまた、速度を最適化する際、それに伴って変化させる必要がある。拡散係数については、 k ; θ の輸送方程式を解き、乱流拡散係数を求める。圧力差の場合は、室内気流を対象とする場合、圧力自身の支配方程式は特に与えられないので、下式 (??) のように、費用関数中の Navier-Stokes 方程式から解く。温度の場合には、温度の実測値があれば、流れ場の場合同様費用関数を立てて解き、実測値がない場合は、温度の保存式を解く。

$$\frac{\partial E(Q; P)}{\partial P(i; j; k)} = 0; \quad (i = 1; 2; \dots; j = 1; 2; \dots; k = 1; 2; \dots) \quad (7)$$

4. 実際の流れ場への応用

4-1 二次元三枚衝立流れ

対象領域は、可視化用風洞内であり、また、上流端、下流端にはフィルタと整流格子を挿入し、流れの乱れを抑えた。風洞内には長さ 30cm の三枚の衝立を、図 2 のように、互い違いに設置した。PIV 法で二次元速度計測で測定した速度ベクトルを、図 3 に示す。実測値が得られたのは、ほぼ主流域であり、ここから、実測時の流れの外形は、およそ、図 3 の実線と考えられる。主流が床に達するのは、ほぼ $x = 300\text{mm}$ 付近である。また、図 4 は、数値解析によって得られた流れ場である。図中の線は、流線である。主流の着地点は、 $x = 250\text{mm}$ とやや下流気味である。図 3 では、流入口 ($x = 600\text{mm}$)、流出口 ($x = 0\text{mm}$) 付近での速度分布がやや中央 ($y = 300\text{mm}$) で強くなっているのに対し、図 4 では、やや全体的に ($y = 300 \sim 600\text{mm}$) 広がっている傾向がある。図 6 ($x = 150\text{mm}$) に示す速度成分 u の分布からも、主流のピーク位置が両者間でずれていることが分かる。図 5 に、費用関数法で再現した流れ場を示す。図 5 及び図 6 に示したある断面における速度成分の分布からも、費用関数法による流れ場は、先に示した主流の着地位置や主流内での速度のピークなど、実測時の様子をリアルに再現し、かつ流体方程式を満たした場となっていることが分かる。表 1 には、流体方程式の重み係数を変化させたときの、各項の値を示している。重み係数を大きくすることで、その条件式が結果に強く作用していることが分かる。

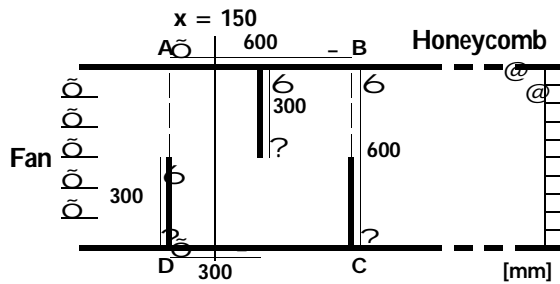


図 2. 三枚衝立流れの実験用風洞と衝立の配置。
ABCD 内を流れ場の撮影及び再現の対象範囲とする。

重み $\zeta \tilde{a}$	重み $\zeta \hat{a}$	第一項の 総和	F_1^2 の 総和	F_2^2 の 総和	強調した 条件項
1.0	1.0	1.15	3.60E-2	3.154	-
10.0	1.0	5.75	1.07E-2	5.37	F_1^2
1.0	10.0	1.14	5.44E-2	2.78	F_2^2
0.1	0.1	0.157	6.61E-2	3.31	第一項
10.0	10.0	3.51	2.39E-2	3.13	F_1^2, F_2^2

表 1. 重みを変化させたときの費用関数の各項の値。

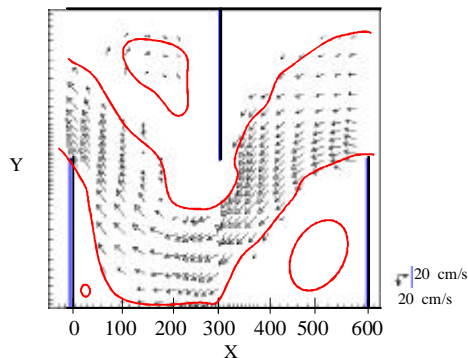


図 3. 画像計測による測定結果。

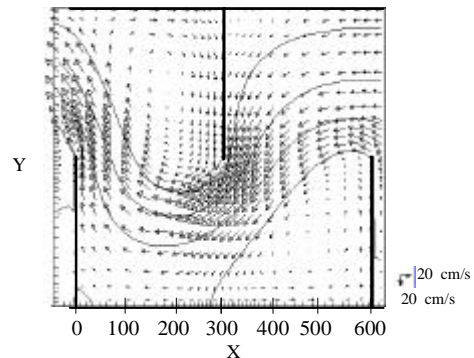


図 4. 数値解析による解析結果。

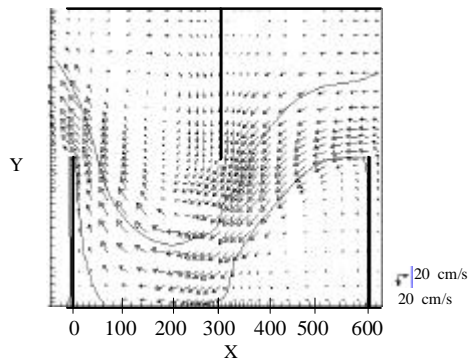


図 5. 本手法により再現された流れ場。

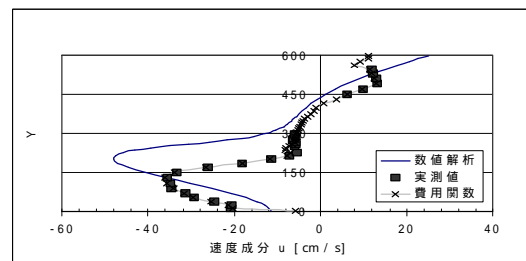


図 6. 速度成分 u のプロファイル。

$x = 150\text{mm}$, $l = 42$.

4-2 三次元角柱前面流れ

図7のように流れに対して平行に設置した角柱前面に起こる流れについて、本手法を適用した。例えば図8に示すように、ここでも、費用関数で再現した流れ場は、実測時の流れのパターンをよく再現している。しかし、図8の $y = 400\text{mm}$ 付近の極端に遅い実測値に対しては、あまり影響を受けていない。これは、3-3(2)で示した実測値に対する信頼度による重み補正が、効果的に機能し、明らかに不適切な実測値によって、再現流れが乱されないことを示している。

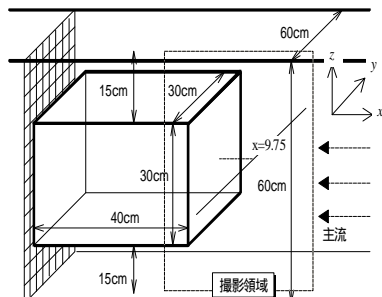


図7. 角柱前面流れの実験用風洞と角柱の配置。

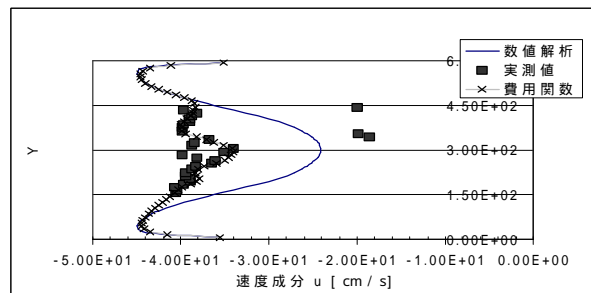


図8. 速度成分 u のプロファイル。
角柱前面から $x = 97.5\text{mm}$, 床から $z = 300\text{mm}$ 。

4-3 自然対流流れ

図9に示すような、底面を加熱し、右側面を冷却した自然対流流れに対して、本手法を適用した。場が非等温場であることから、温度計測も行い、温度場に対しても費用関数を用いた。図10には、ほぼ中央付近での高さ z 方向の温度の変化の様子を示している。温度というスカラ量に対しても、本手法が有効であることが分かる。

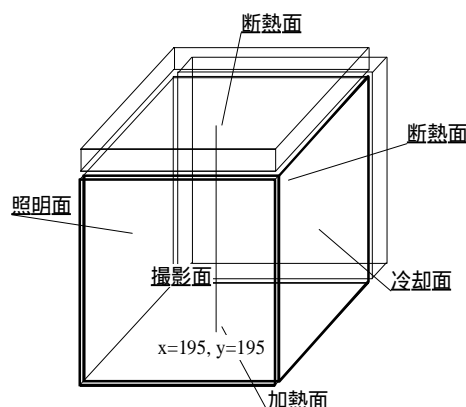


図9. 自然対流流れの実験用水槽。

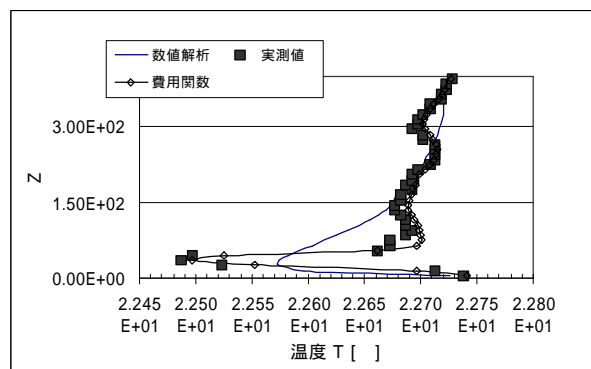


図10. 温度 T のプロファイル。
 $x = 195\text{mm}$, $y = 195\text{mm}$ 。

5. おわりに

本研究では、費用関数による最適化手法に基づいた流れ場把握手法を開発した。実際の場に適用して、この手法により、実測時の流れ場をリアルに再現し、かつ、流体方程式を満たした流れ場を得ることが出来ることが確認できた。また、温度場と流れ場を同時に最適化することが可能であることが示され、一般的なスカラ場への応用の可能性も見いだされた。

参考文献

- 1) Journal. of the Meteorological Society of Japan, Vol.75, No.1B, 1997
- 2) 茂里ら, 流れの可視化/画像処理と数値計算を併用した方法による三次元流速場の計測, 流れの可視化, vol.9, No.34, pp.233-236, 1989
- 3) 杉井ら, 流場モデルを用いた速度場の画像計測, 可視化情報, Vol.16, No.1, pp.207-210, 1996
- 4) Akikazu Kaga, Yoshio Inoue, and Katsuhito Yamaguchi : Pattern tracking algorithms using successive abandonment, Journal of Flow Visualization and Image Processing, Vol.1, pp.283-296, 1993